

Paper Type: Original Article



Integrating Assembly Line Balancing and Multi-Product Production Planning through Two-Stage Stochastic Programming under Demand and Processing Time Uncertainty

Mehdi Alinaghian^{1,*}, Negin Sadat Qaziasgar¹ 

¹ Department of Industrial and Systems Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran; alinaghian@iut.ac.ir; n.ghazi@in.iut.ac.ir.

Citation:



Alinaghian, M., & Qaziasgar, N. S. (2025). A two-stage stochastic programming model for assembly line level integration and multi-product batch sizing under demand and processing time uncertainty. *Management Sciences and Decision Analysis*, 3(4), 495-507.

Received: 27/04/2025

Reviewed: 19/07/2025

Revised: 08/09/2025

Accepted: 01/11/2025

Abstract

Purpose: In many manufacturing systems, assembly line design and production planning decisions are made independently, despite their strong interdependence through capacity, cycle time, and resource allocation. Moreover, most existing models consider only one source of uncertainty, such as demand or processing time, while simultaneous modeling of both uncertainties has received limited attention. This limitation may reduce decision reliability and increase operational costs in dynamic production environments. Therefore, this study aims to develop an integrated two-stage stochastic programming model for simultaneously addressing assembly line balancing and multi-product production planning under demand and processing time uncertainty.

Methodology: The proposed framework is formulated as a two-stage stochastic programming model in which strategic decisions, including task assignment, workstation activation, and cycle time determination, are made in the first stage, while operational decisions regarding production quantities, inventory levels, shortages, and setup plans are optimized after uncertainty realization in the second stage. The nonlinear formulation is transformed into a Mixed-Integer Linear Programming model through linearization techniques and solved using the Sample Average Approximation method combined with Monte Carlo simulation based on 100 scenarios.

Findings: The results demonstrate that simultaneously considering demand and processing time uncertainty produces more stable production decisions and reduces system performance variability. The proposed model decreases the expected total cost, mitigates shortage risk, and improves the reliability of production planning under uncertain operating conditions. Furthermore, scenario analysis and Sample Average Approximation convergence confirm the statistical stability and practical applicability of the proposed framework in dynamic and highly uncertain manufacturing environments.

Originality/Value: The primary contribution of this study is the development of an integrated decision-making framework that simultaneously addresses assembly line balancing and multi-product production planning under dual sources of uncertainty. Unlike previous studies that typically investigate these problems or uncertainty sources separately, the proposed model captures the interactions between strategic and operational decisions within a unified two-stage stochastic programming framework. The proposed approach provides a practical decision-support tool for designing more resilient assembly systems, reducing operational risk, and improving capacity utilization in uncertain manufacturing environments.

Keywords: Two-stage stochastic programming, Sample average approximation, Multi-manned assembly line balancing problem, Batch size determination.



Corresponding Author: alinaghian@iut.ac.ir

<https://doi.org/10.22105/msda.v3i4.142>

Licensee. *Management Sciences and Decision Analysis*. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



یکپارچه‌سازی تراز خط مونتاژ و برنامه‌ریزی تولید چندمحصولی با برنامه‌ریزی تصادفی دومرحله‌ای تحت عدم قطعیت تقاضا و زمان پردازش

مهدی علینقیان^۱، نگین سادات قاضی‌عسگر^۱

^۱گروه مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.

چکیده

هدف: در بسیاری از سیستم‌های تولیدی، تصمیمات مربوط به طراحی خط مونتاژ و برنامه‌ریزی تولید به صورت مستقل اتخاذ می‌شوند، در حالی که این دو مساله از نظر ظرفیت، زمان چرخه و تخصیص منابع به شدت به یکدیگر وابسته هستند. از سوی دیگر، اغلب مدل‌های موجود تنها یکی از منابع عدم قطعیت، مانند تقاضا یا زمان پردازش را در نظر گرفته‌اند و کمتر به مدل‌سازی هم‌زمان این دو عامل پرداخته‌اند. این محدودیت می‌تواند موجب کاهش قابلیت اطمینان تصمیمات و افزایش هزینه‌های عملیاتی در محیط‌های تولیدی پویا شود. از این رو، هدف این پژوهش توسعه یک مدل یکپارچه برنامه‌ریزی تصادفی دومرحله‌ای برای تلفیق تراز خط مونتاژ و برنامه‌ریزی تولید چندمحصولی با در نظر گرفتن هم‌زمان عدم قطعیت تقاضا و زمان پردازش است.

روش‌شناسی پژوهش: مدل پیشنهادی بر پایه برنامه‌ریزی تصادفی دومرحله‌ای توسعه یافت، به گونه‌ای که تصمیمات راهبردی شامل تخصیص وظایف، فعال‌سازی ایستگاه‌های کاری و تعیین زمان چرخه در مرحله نخست و تصمیمات عملیاتی شامل مقدار تولید، موجودی، کمبود و راه‌اندازی پس از تحقق سناریوهای عدم قطعیت در مرحله دوم اتخاذ می‌شوند. مدل غیرخطی با استفاده از تکنیک‌های خطی‌سازی به یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط تبدیل شد و با روش تقریب میانگین نمونه و شبیه‌سازی مونت کارلو مبتنی بر ۱۰۰ سناریو حل شد.

یافته‌ها: نتایج نشان داد که در نظر گرفتن هم‌زمان عدم قطعیت تقاضا و زمان پردازش موجب دستیابی به تصمیمات پایدارتر و کاهش نوسانات عملکرد سیستم می‌شود. مدل پیشنهادی توانست هزینه کل مورد انتظار، ریسک کمبود و نوسانات ناشی از تغییرات شرایط عملیاتی را کاهش دهد و در عین حال قابلیت اطمینان برنامه‌ریزی تولید را افزایش دهد. همچنین نتایج تحلیل سناریوها و همگرایی روش تقریب میانگین نمونه نشان داد که چارچوب پیشنهادی از پایداری آماری مناسبی برخوردار بوده و قابلیت استفاده در محیط‌های تولیدی پویا و پرنوسان را دارد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نوآوری اصلی این پژوهش در ارائه یک چارچوب یکپارچه برای تصمیم‌گیری هم‌زمان در طراحی خط مونتاژ و برنامه‌ریزی تولید چندمحصولی تحت دو منبع اصلی عدم قطعیت است. برخلاف مطالعات پیشین که معمولاً هر یک از این مسائل یا تنها یکی از منابع عدم قطعیت را به صورت مستقل بررسی کرده‌اند، مدل پیشنهادی وابستگی متقابل تصمیمات راهبردی و عملیاتی را در قالب برنامه‌ریزی تصادفی دومرحله‌ای لحاظ می‌کند. این چارچوب می‌تواند به مدیران تولید در طراحی خطوط مونتاژ مقاوم‌تر، کاهش ریسک عملیاتی و بهبود بهره‌برداری از ظرفیت تولید در شرایط نامطمئن کمک کند.

کلیدواژه‌ها: برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای، تقریب میانگین نمونه‌ای، تراز خط مونتاژ چندمحصولی، تعیین اندازه دسته تولید.

۱- مقدمه

در محیط‌های تولیدی مدرن که تحت تاثیر روندهای پویا و ناپایدار بازار قرار دارند، سیستم‌های تولیدی نیازمند ساختارهایی انعطاف‌پذیر و مقاوم در برابر عدم قطعیت هستند. خط مونتاژ به عنوان یکی از اجزای کلیدی سیستم‌های تولید انبوه، نقشی تعیین‌کننده در کاهش هزینه‌های عملیاتی،

افزایش بهره‌وری و تضمین کیفیت محصول ایفا می‌کند. با این حال، بسیاری از مدل‌های کلاسیک تراز خط مونتاژ (*MALBP*) بر فرض قطعی بودن پارامترهای عملیاتی، از جمله زمان‌های پردازش وظایف، استوار هستند؛ فرضی که در شرایط واقعی کارخانه‌ها، به‌ویژه در حضور عوامل انسانی، تغییرپذیری مواد اولیه، خرابی‌های پیش‌بینی نشده ماشین‌آلات و نوسانات عملکرد تجهیزات، کمتر برقرار است.

به موازات آن، مدل‌های برنامه‌ریزی تولید مانند *MCLSP* نیز اغلب با تقاضاهای ثابت یا قابل پیش‌بینی طراحی شده‌اند، در حالی که وقوع شوک‌های اقتصادی، اختلالات زنجیره‌تامین، تحول سریع ترجیحات مشتریان و نوسانات دوره‌ای بازار موجب تغییرات غیرقابل پیش‌بینی در تقاضای محصول می‌شود. این ناپایداری‌ها می‌توانند موجب بروز کمبود موجودی، تأخیر در تحویل، افزایش هزینه‌های نگهداری و کاهش سودآوری سیستم شوند. بنابراین، ترکیب همزمان دو منبع عدم قطعیت تقاضا و زمان پردازش مستلزم رویکردهایی است که بتوانند پویایی رفتار سیستم را در مواجهه با اختلالات واقع‌گرایانه شبیه‌سازی و مدیریت کنند.

اگرچه تحقیقات قابل توجهی در حوزه تراز خط مونتاژ و برنامه‌ریزی دسته تولید انجام شده است، اغلب این مطالعات تنها یکی از دو جنبه عدم قطعیت را مورد توجه قرار داده‌اند: یا بر منابع عدم قطعیت عملیاتی مانند زمان پردازش تمرکز کرده‌اند، یا بر شوک‌های تقاضا. همچنین، مدل‌های کلاسیک غالباً شامل تصمیمات تجویزی یک مرحله‌ای یا با سطح تعامل اندک میان تصمیمات طراحی خط و برنامه‌ریزی تولید هستند. این امر موجب می‌شود که عملکرد سیستم در شرایط واقعی با انحراف قابل ملاحظه‌ای نسبت به نتایج پیش‌بینی شده مواجه شود.

در این راستا، پژوهش حاضر به توسعه یک چارچوب یکپارچه برای مدل‌سازی همزمان دو منبع عدم قطعیت در محیط ترکیبی *MALBP-MCLSP* می‌پردازد. در مدل پیشنهادی، زمان چرخه به‌عنوان متغیر اتصال‌دهنده بین بخش طراحی خط مونتاژ و برنامه‌ریزی تولید در نظر گرفته شده است و تصمیمات تخصیص وظایف، ظرفیت تولید، اندازه دسته و مدیریت هزینه‌های کمبود تحت سناریوهای مختلف تقاضا و زمان پردازش مورد تحلیل قرار می‌گیرد. رویکرد مورد استفاده مبتنی بر برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای است که در آن تصمیمات مرحله اول پیش از آشکارشدن عدم قطعیت اتخاذ می‌گردند، در حالی که تصمیمات مرحله دوم متناسب با تحقق سناریوهای واقعی تقاضا و زمان پردازش تنظیم می‌شوند. نوآوری اصلی این پژوهش در ارائه یک مدل *MALBP-MCLSP* کاملاً یکپارچه است که به‌طور همزمان دو منبع نامطمئن کلیدی را دربر می‌گیرد.

این رویکرد ضمن نزدیک‌سازی رفتار سیستم به شرایط واقعی، امکان ارزیابی عملکرد تصمیمات طراحی و برنامه‌ریزی را در برابر تغییرات تقاضا و اختلالات عملیاتی فراهم می‌سازد و می‌تواند راهکارهایی عملی برای کاهش ریسک عملیاتی، بهبود سطح خدمت‌دهی، کاهش هزینه‌های موجودی و افزایش کارایی کلی سیستم تولید ارائه دهد.

ساختار ادامه مقاله به این ترتیب است: در بخش ۲ مروری بر ادبیات مرتبط ارائه می‌شود، در بخش ۳ مدل ریاضی پیشنهادی معرفی و مساله تعریف می‌گردد؛ بخش ۴ به روش‌شناسی حل و تحلیل عددی مساله می‌پردازد و نهایتاً، بخش ۵ به نتیجه‌گیری و مسیرهای آتی پژوهش اختصاص دارد.

۲- مرور ادبیات

ادبیات موضوع مربوطه در چندین بخش به بررسی *MALBP*، *MCLSP*، *MALBP-MCLSP*، عدم قطعیت در زمان پردازش وظایف^۱ و عدم قطعیت در تقاضا پرداخته است.

¹ Processing time uncertainty

MALBP-۲-۱

ترازکردن خط مونتاژ^۱ یکی از مسایل بنیادی در برنامه‌ریزی تولید و طراحی سیستم‌های ساخت محسوب می‌شود. در محیط‌های تولیدی چندمحصوله^۲، این مساله به‌صورت چند آیتمی تعریف شده و در قالب MALBP مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اهمیت MALBP ناشی از نقش کلیدی آن در افزایش بهره‌وری خطوط تولید، ایجاد توازن در ظرفیت کاری ایستگاه‌ها و استفاده بهینه از منابع انسانی و تجهیزاتی است.

در ادبیات کلاسیک، دو گونه اصلی از MALBP تعریف شده است: ۱- MALBP که در آن زمان چرخه مشخص است و هدف، کمینه‌سازی تعداد ایستگاه‌های کاری فعال است، ۲- MALBP که در آن تعداد ایستگاه‌ها از پیش تعیین شده و ثابت بوده و هدف، کمینه‌سازی زمان چرخه است [1]، [2]. این دو ساختار بنیادی، پایه بسیاری از مدل‌های توسعه‌یافته در زمینه طراحی خطوط مونتاژ هستند و جهت‌دهنده انتخاب رویکرد مناسب برای محیط‌های کاربردی مختلف می‌باشند.

افزون بر نوع مساله، ساختار فیزیکی خطوط مونتاژ نیز می‌تواند تاثیر قابل توجهی بر مدل‌سازی داشته باشد. خطوط کلاسیک معمولاً به‌صورت یک‌طرفه^۳ هستند، اما در برخی صنایع مانند تولید خودروها و محصولات بزرگ، خطوط دوطرفه^۴ به‌کار گرفته می‌شوند که باعث صرفه‌جویی در فضا و کاهش زمان حمل‌ونقل و ظایف بین ایستگاه‌ها می‌شود [3]. همچنین، در خطوط موازی چندین خط مستقل یا هم‌زمان به اجرا در می‌آیند که این ویژگی به‌ویژه در محیط‌های با تنوع بالا و نیاز به انعطاف‌پذیری بیشتر حایز اهمیت است [4].

بخش قابل توجهی از مطالعات اولیه در زمینه MALBP بر مبنای تقاضای قطعی و زمان‌های پردازش ثابت بوده‌اند. این فرضیات، به ساده‌سازی مدل کمک می‌کنند اما در محیط‌های واقعی که با تغییرات ناشی از انسانی، فنی و بازار مواجه‌اند، اعتبار خود را از دست می‌دهند. بنابراین، پژوهش‌ها به سمت مدل‌سازی MALBP تحت شرایط عدم قطعیت سوق یافته‌اند. نمونه‌هایی از این تلاش‌ها شامل مدل‌سازی تراز خطوط دوطرفه با زمان پردازش تصادفی بوده است که با استفاده از الگوریتم‌های ترکیبی، شبیه‌سازی یا تحلیل مبتنی بر سناریو به بررسی رفتار سیستم پرداخته‌اند [5]. همچنین، مرور جامعی از مدل‌های گوناگون مانند خطوط U شکل، خطوط مختلط و خطوط چندسطحی با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های عملیاتی تحلیل کرده‌اند که دیدگاه گسترده‌تری نسبت به فضای مساله نشان داده‌اند [1]، [6].

کاربردهای صنعتی متعددی از MALBP گزارش شده‌اند که اهمیت این مساله در عمل را نشان می‌دهند. برای مثال، در خطوط مونتاژ خودروهای سنگین، ضرورت مدیریت محدودیت‌های هندسی، چیدمان فضا و تفاوت زمان اجرای وظایف باعث شده است ترازکردن خط نقش حیاتی در پایداری و کارایی تولید ایفا کند [3]. در صنایع پیشرفته‌تر مانند رباتیک و الکترونیک، بهره‌گیری از خطوط موازی به‌همراه الگوریتم‌های مدرن مانند Search Beam یا مدل‌های ترکیبی، بهره‌وری را افزایش داده و امکان واکنش سریع به تغییرات را فراهم می‌آورد [7].

با توجه به این پیشینه، در مدل پیشنهادی این پژوهش MALBP به‌عنوان بخش تصمیم‌گیری مرحله اول چارچوب دو مرحله‌ای ایفای نقش می‌کند. تعیین ساختار خط مونتاژ شامل تعداد ایستگاه‌ها و زمان چرخه هر محصول، به‌عنوان تصمیمات راهبردی پیش از افشای عدم قطعیت اتخاذ می‌شوند و در تمامی سناریوها ثابت می‌مانند. این تصمیمات زیربنایی به‌طور مستقیم بر توانایی سیستم در پاسخ به تغییرات شرایط عملیاتی و تقاضای تصادفی اثرگذار هستند. از این منظر، توسعه مدل‌های MALBP از ساختارهای تک محصوله به ساختارهای چندمحصوله و از محیط‌های قطعی به محیط‌های توأم با عدم قطعیت، نه تنها روندی طبیعی در پیشرفت این حوزه است، بلکه لازمه مواجهه با واقعیت‌های پیچیده و پویا در سیستم‌های تولیدی امروزی به‌شمار می‌رود.

MCLSP-۲-۲

MCLSP یکی از مسایل اساسی در برنامه‌ریزی تولید و مدیریت عملیات است که به‌طور گسترده در محیط‌های ساخت و برنامه‌ریزی میان‌مدت به‌کار می‌رود. این مساله به دنبال تعیین مقدار تولید بهینه برای چندین محصول در طول یک افق زمانی گسسته است، به‌طوری‌که هزینه‌های مرتبط با

¹ Assembly line balancing² Multi-item³ One-sided⁴ Two-sided

راه‌اندازی، تولید، نگهداری موجودی و کسری به حداقل برسند و در عین حال تقاضای زمانی مشتریان نیز پاسخ داده شود [8]. اهمیت *MCLSP* به‌ویژه در محیط‌های تولیدی با تنوع محصول بالا و محدودیت ظرفیت کاملاً مشهود است، زیرا تصمیمات مربوط به زمان‌بندی^۱ و مقدار تولید تأثیر مستقیمی بر عملکرد مالی و سطح سرویس‌دهی سازمان دارند.

در فرم کلاسیک، مدل *lot-sizing* شامل یک یا چند محصول، یک افق زمانی گسسته، هزینه‌های ثابت برای راه‌اندازی، هزینه‌های متغیر تولید و هزینه‌های نگهداری است. توسعه مدل به سمت چندمحصوله و ظرفیت‌دار^۲ به *MCLSP* تعمیم داده می‌شود که در آن محدودیت‌های منابع تولیدی از قبیل ظرفیت ماشین‌آلات، انرژی، فضای انبار و نیروی انسانی نیز لحاظ شده‌اند [9]. این توسعه موجب افزایش واقع‌گرایی مدل شده و به آن قابلیت کاربرد در سناریوهای عملیاتی پیچیده‌تری را می‌بخشد.

از منظر مدل‌سازی عدم قطعیت، *MCLSP* به‌طور سنتی با فرض داده‌های قطعی توسعه یافته است اما در بسیاری از کاربردهای واقعی، تقاضا و هزینه‌ها متغیر و غیرقطعی هستند. برای پاسخ به این چالش، رویکردهای برنامه‌ریزی تصادفی و بهینه‌سازی مقاوم برای *MCLSP* توسعه یافته‌اند. به‌عنوان مثال تمپلمیر [10] و هلبِر و همکاران [11] مدل‌هایی را ارائه کرده‌اند که در آن‌ها تقاضا به‌صورت مجموعه‌ای از سناریوهای تصادفی یا توزیع‌های آماری مدل می‌شود. این رویکردها امکان تحلیل پاسخ مدل در برابر نوسانات تقاضا و شرایط عملیاتی مختلف را فراهم کرده‌اند.

افزون بر این، در مطالعات پیشرفته‌تر، ساختار مدل‌های دومرحله‌ای برای *MCLSP* پیشنهاد شده است که در آن تصمیمات سطح کلان مانند تخصیص ظرفیت، انتخاب تجهیزات و تخصیص منابع تولیدی در مرحله اول اتخاذ می‌شوند و سپس در مرحله دوم، برنامه‌ریزی دقیق تولید و تعیین اندازه دسته‌ها به‌صورت واکنشی در برابر شرایط واقعی (مانند تقاضای تحقق‌یافته) انجام می‌شود [12]. این ساختار زمینه‌ساز اتصال طبیعی *MCLSP* با سایر تصمیمات سطح بالای تولید مانند طراحی خط مونتاژ (*MALBP*) است.

در مدل پیشنهادی این مقاله، *MCLSP* به‌عنوان بخش عملیاتی مرحله دوم چارچوب ترکیبی به‌کار گرفته شده است. پس از تحقق عدم قطعیت تقاضا و زمان پردازش وظایف در مرحله دوم، مساله اندازه دسته تولید برای هر محصول و هر دوره زمانی حل می‌شود. نکته کلیدی این است که تصمیمات مرحله دوم به‌صورت مستقیم تحت تأثیر تصمیمات راهبردی مرحله اول قرار دارند؛ یعنی ساختار خط مونتاژ، زمان چرخه و تخصیص وظایف که در *MALBP* تعیین می‌شوند، محدودیت‌های ظرفیت موثر بر *MCLSP* را شکل می‌دهند.

از این منظر، اتصال *MCLSP* به *MALBP* در قالب یک مدل تصادفی دومرحله‌ای، نه تنها یک ساختار منطقی، بلکه یک رویکرد قدرتمند برای افزایش تاب‌آوری، کارایی هزینه‌ای و قابلیت انطباق سیستم تولید با بازار پرنوسان معاصر به‌شمار می‌رود. در این چارچوب، متغیر زمان چرخه و ظرفیت منابع تولیدی نقش پیونددهنده میان این دو مساله را ایفا می‌کنند، به‌گونه‌ای که تصمیمات سطح ایستگاه در *MALBP*، مستقیماً محدودده تصمیمات اجرایی *MCLSP* را تعیین می‌نمایند. این ارتباط عمقی میان استراتژی طراحی خط و سیاست برنامه‌ریزی تولید، یکی از نقاط نوآوری اصلی مدل حاضر است که به‌صورت دقیق‌تر در بخش‌های بعدی تشریح خواهد شد.

۳-۲- MALBP-MCLSP

در ادبیات کلاسیک، *MALBP* و *MCLSP* اغلب به‌طور مستقل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. با این حال، در محیط‌های تولیدی واقعی، این دو تصمیم حیاتی (طراحی ساختار خط و برنامه‌ریزی تولید) به‌شدت درهم‌تنیده‌اند و اتخاذ تصمیمات بهینه در یکی، بدون در نظر گرفتن دیگری، می‌تواند به راه‌حل‌های زیر بهینه منجر شود. این امر باعث ظهور نیاز به مدل‌های ترکیبی شده است که هر دو زیرمسئله را به‌طور هم‌زمان مدل‌سازی کنند.

در میان مطالعات معدود موجود، می‌توان به مطالعه‌ی اخیر لی و همکاران [13] اشاره کرد که یک مدل ترکیبی با عنوان *MCALB-LS-UD* برای برنامه‌ریزی تولید ماسک در دوره‌ی همه‌گیری *COVID-19* ارائه کرده‌اند. آن‌ها از یک چارچوب برنامه‌ریزی تصادفی دومرحله‌ای استفاده کرده‌اند

¹ Scheduling

² Capacitated

که در آن، مرحله اول شامل طراحی خط مونتاژ (تخصیص وظایف و ایستگاه‌ها) و مرحله دوم شامل برنامه‌ریزی دسته تولید برای مواجهه با تقاضای نامعلوم است. این مطالعه، نمونه‌ای مهم از اتصال *MALBP* و *MCLSP* در یک مدل یکپارچه تحت عدم قطعیت است.

از دیدگاه ساختاری، زمان چرخه و ظرفیت ایستگاه‌ها نقش واسطه حیاتی میان *MALBP* و *MCLSP* را ایفا می‌کنند. به عبارت دیگر، تصمیمات مرحله اول همچون تخصیص وظایف، فعال‌سازی ایستگاه‌ها و تعیین زمان چرخه، ظرفیت واقعی تولید هر دوره را شکل می‌دهند که خود مستقیماً بر نتایج مرحله دوم یعنی اندازه دسته‌های تولید، سیاست موجودی و کسری اثرگذار است [14]. این وابستگی متقابل، تأکیدکننده ضرورت رویکردهای ادغام‌شده در مدلسازی است.

با این وجود، مرور ادبیات نشان می‌دهد که مدل‌های ترکیبی *MALBP-MCLSP* هنوز به صورت محدود، آن‌هم عمدتاً در شرایط قطعی، توسعه یافته‌اند. پژوهش‌هایی که به ترکیب این دو زیرمساله در شرایط عدم قطعیت تقاضا یا زمان پردازش پرداخته باشند، بسیار نادر هستند. همین‌کلا ادبیاتی، فرصت مناسبی برای گسترش مرزهای دانش در این حوزه فراهم می‌سازد.

از نظر روش‌های حل، چند رویکرد برای مدلسازی و حل این مساله‌های ترکیبی پیشنهاد شده‌اند:

۱. مدل‌های دو مرحله‌ای مانند مقاله لی و همکاران [13] که در آن ابتدا طراحی خط انجام شده و سپس برنامه‌ریزی تولید در مرحله دوم صورت می‌گیرد.
۲. مدل‌های تجزیه‌شده^۱ به‌ویژه در مواردی که مدل ترکیبی بسیار بزرگ یا پیچیده است و استفاده از روش‌هایی مانند *Benders Decomposition* یا *L-shaped Method* برای جداکردن زیرمدل‌ها توصیه شده است [15].
۳. مدل‌های سلسله‌مراتبی^۲ در مواردی که بین تصمیم‌گیرندگان مختلف در دو سطح (مثلاً مدیر ارشد و مدیر خط) تفکیک وجود دارد [16].

در مجموع، بررسی متون علمی نشان می‌دهد که اگرچه زیرمسایل *MALBP* و *MCLSP* به‌طور گسترده در ادبیات بررسی شده‌اند اما مطالعات تلفیقی آن‌ها به‌ویژه در حضور عدم قطعیت‌های واقعی مانند تقاضای متغیر و زمان‌های پردازش تصادفی هنوز در مراحل ابتدایی هستند. این وضعیت، نیاز به توسعه مدل‌های جامع‌تر با توانایی کنترل ریسک، تطبیق‌پذیری بالا و قابلیت اعمال در دنیای واقعی را برجسته می‌کند.

۲-۴- عدم قطعیت در زمان پردازش وظایف

یکی از فرض‌های متداول در مسایل تراز خط مونتاژ^۳ و زمان‌بندی این است که زمان‌های پردازش وظایف مقداری ثابت، قطعی و قابل پیش‌بینی است. این فرض در محیط‌های تولیدی واقعی، به‌ویژه در خطوط مونتاژ چندمحصوله که عوامل انسانی، تغییر کیفیت مواد اولیه، یا خرابی‌های پیش‌بینی‌نشده ماشین‌آلات وجود دارد، به‌ندرت صادق است. در نتیجه، تحقیقات متعددی به مدلسازی عدم قطعیت زمان پردازش پرداخته‌اند. به‌عنوان مثال مطالعه‌ی اسگول و بکر [17] در حوزه *ALBP* به بررسی خطوط مونتاژ با نرخ‌های تولید متغیر و زمان‌های پردازش تصادفی پرداخته‌اند، در حالی که در حوزه زمان‌بندی، مرجع کلاسیک جهانی زمان‌بندی [18] و مطالعاتی همچون مطالعات رحمانی و حیدری [19] روش‌های بهینه‌سازی تحت زمان‌های پردازش نامطمئن را بررسی کرده‌اند. با وجود این تلاش‌ها، بیشتر مدل‌ها تنها یکی از منابع عدم قطعیت (مانند زمان پردازش یا تقاضا) را در نظر گرفته‌اند.

از منظر روش‌شناسی، سه رویکرد اصلی برای مدلسازی عدم قطعیت زمان پردازش در ادبیات مشاهده می‌شود:

رویکرد ۱ - رویکرد سناریو محور که در آن مقادیر زمان پردازش به صورت مجموعه‌ای از سناریوهای گسسته همراه با احتمالات وقوع مدل می‌شوند [12]، [20]. این روش از نظر یکپارچگی با مدل‌های *MILP* بسیار مناسب است، اما تعداد سناریوها می‌تواند باعث افزایش چشمگیر ابعاد مدل شود.

¹ Decomposition-based methods

² Bilevel optimization

³ Assembly Line Balancing Problems (ALBP)

رویکرد ۲- مدل‌های توزیعی یا احتمالاتی که زمان پردازش را به عنوان متغیر تصادفی با یک توزیع آماری مشخص (مانند نرمال یا گاما) مدل می‌کنند و معمولاً در تحلیل‌های آماری یا شبیه‌سازی استفاده می‌شوند [18].

روی‌کرد ۳- رویکرد فازی که به‌ویژه زمانی که داده‌ها محدود یا غیرقابل اعتماد باشند، مورد استفاده قرار گرفته و زمان پردازش را به صورت پارامترهای فازی با دامنه نامطمئن مدل می‌کند [21]. رویکرد فازی با وجود سادگی محاسباتی، از نظر کمی‌سازی ریسک و احتمال وقوع عدم قطعیت محدودیت‌هایی دارد.

درج زمان‌های پردازش تصادفی در مدل‌های یکپارچه *MALBP-MCLSP* باعث بروز چالش‌های محاسباتی قابل توجهی می‌شود. ۱- ترکیب هم‌زمان عدم قطعیت در زمان پردازش و تقاضا منجر به پدیده انفجار سناریو می‌شود که در آن تعداد حالات ممکن رشد تصاعدی یافته و نیاز به تکنیک‌های کاهش سناریو و روش *SAA* را ضروری می‌کند [20]. ۲- قیود مدل ممکن است به‌طور طبیعی غیرخطی شوند، زیرا زمان چرخه، ظرفیت ایستگاه‌ها و تصمیمات تولید به‌طور وابسته در تعامل هستند. لذا استفاده از روش‌های خطی‌سازی، تجزیه و رویکردهای *decomposition* برای قابل حل‌سازی مدل الزامی است. ۳- تصمیمات مرحله اول (طراحی خط و تخصیص وظایف) تأثیری مستقیم بر تصمیمات مرحله دوم (تولید، موجودی و کسری) در سناریوهای مختلف دارند که پیچیدگی تصمیم‌گیری چندمرحله‌ای را افزایش می‌دهد.

به‌طور کلی، در نظرگیری عدم قطعیت زمان پردازش وظایف موجب نزدیک‌تر شدن مدل به شرایط واقعی می‌شود و امکان ارزیابی رفتار سیستم تحت شرایط غیرقطعی را فراهم می‌آورد. با این حال، مدیریت این عدم قطعیت نیازمند افزایش هوشمندانه در ساختار مدل، استفاده از ابزارهای محاسباتی کارآمد و بهره‌گیری از رویکردهای کاهش ریسک و تکنیک‌های عددی مناسب است.

۵-۲- عدم قطعیت در تقاضا

تقاضا یکی از اصلی‌ترین محرک‌های تصمیم‌گیری در برنامه‌ریزی تولید است؛ با این حال، در محیط‌های واقعی و پویا، ماهیتی ناپایدار و پیش‌بینی‌ناپذیر دارد. وقوع شوک‌های ناگهانی نظیر همه‌گیری‌های جهانی، تغییرات رفتاری مشتریان، ظهور فناوری‌های جایگزین یا اختلالات زنجیره تأمین می‌تواند موجب نوسانات شدید در تقاضا شود. در چنین شرایطی، مفروض گرفتن تقاضا به صورت ثابت و قطعی در مدل‌های کلاسیک برنامه‌ریزی تولید، منجر به راه‌حل‌هایی غیرواقعی و حتی ناکارآمد می‌شود. از این‌رو، پژوهشگران روش‌های گوناگونی را برای مدلسازی عدم قطعیت در تقاضا توسعه داده‌اند که هر یک با توجه به سطح اطلاعات موجود و رویکرد ریسک‌پذیری تصمیم‌گیرنده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

یکی از پرکاربردترین رویکردها، برنامه‌ریزی تصادفی مبتنی بر سناریو است که در آن مقادیر تقاضا با مجموعه‌ای از سناریوهای گسسته همراه با احتمالات وقوع مدل می‌شود و در چارچوب برنامه‌ریزی دومرحله‌ای، تصمیمات مرحله اول پیش از تحقق تقاضا و تصمیمات مرحله دوم پس از افشای آن اتخاذ می‌شوند [12]، [22]. همچنین روش *SAA* به عنوان یک ابزار اثبات شده برای تقریب امید ریاضی هزینه‌ها و عملکرد سیستم در چنین مدل‌هایی به کار می‌رود [20].

در شرایطی که اطلاعات آماری قابل اتکا در دسترس نباشد، بهینه‌سازی مقاوم جایگزین مناسبی است و راه‌حل‌هایی را تولید می‌کند که در برابر شدیدترین حالت‌های عدم قطعیت نیز قابل اجرا باشند [23]، [24]. علاوه بر آن، رویکردهای توزیعی و بهینه‌سازی توزیعی مقاوم^۱ با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از توزیع‌های ممکن برای تقاضا، عملکرد تصمیمات را تحت نوعی عدم قطعیت در توزیع ارزیابی می‌کنند [25].

از منظر محاسباتی، مدلسازی عدم قطعیت تقاضا نیز با چالش‌هایی مانند افزایش تعداد سناریوها و رشد نمایی ابعاد مدل همراه است؛ در نتیجه روش‌هایی مانند کاهش سناریو، تجزیه مبتنی بر *Benders* و الگوریتم‌های تقریبی معرفی شده‌اند تا حل این مدل‌های دیجیتال را تسهیل کنند [26]. مطالعاتی که در زمینه سایزبندی دسته‌ها و برنامه‌ریزی تولید از این رویکردهای سناریویی دومرحله‌ای استفاده کرده‌اند، اهمیت ترکیب تصمیمات استراتژیک و عملیاتی در مواجهه با تقاضای متغیر را نشان می‌دهند [27].

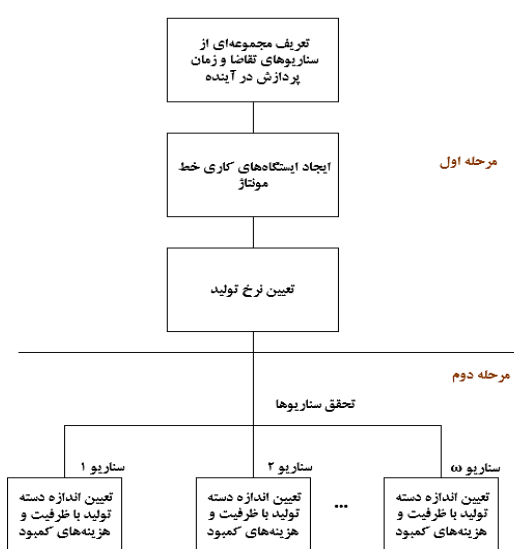
¹ Distributionally Robust Optimization (DRO)

به‌طور خلاصه، در نظرگیری عدم قطعیت تقاضا در مدل‌های برنامه‌ریزی تولید نه یک انتخاب، بلکه یک ضرورت علمی و صنعتی است؛ زیرا تنها با این رویکرد می‌توان سیستم‌های واقعی را که با رفتار غیر خطی و غیر قابل پیش‌بینی بازار مواجه‌اند، به‌طور دقیق مدل‌سازی و مدیریت کرد.

۶-۲- جایگاه پژوهش حاضر

بررسی جامع ادبیات نشان می‌دهد که اگرچه $MALBP$ و تعیین اندازه دسته تولید چندمحصوله ($MCLSP$) در تحقیقات مختلف به‌طور مستقل و حتی در قالب مدل‌های ترکیبی به‌کار گرفته شده‌اند، اما بخش عمده این پژوهش‌ها فرض داده‌های قطعی را پذیرفته و تنها به یک منبع از عدم قطعیت پرداخته‌اند. در نتیجه، مدل‌هایی که همزمان عدم قطعیت در تقاضا و زمان پردازش را در یک چارچوب یکپارچه ترکیبی $MALBP-MCLSP$ لحاظ کنند، بسیار محدود هستند.

این شکاف پژوهشی دقیقاً نقطه تمرکز نوآوری این مطالعه است. مدل پیشنهادی، یک چارچوب برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای ارائه می‌دهد که در شکل ۱، نشان داده شده است. در مرحله اول طراحی خط ($MALBP$) شامل تخصیص وظایف و تعیین ساختار ایستگاه‌ها انجام می‌شود و در مرحله دوم برنامه‌ریزی تولید ($MCLSP$) تحت افشای عدم قطعیت تقاضا و زمان پردازش واقعی مساله صورت می‌گیرد.



شکل ۱- فرایند تصمیم‌گیری مدل پژوهش.

Figure 1- Research model decision-making process.

در این ساختار، زمان چرخه به‌عنوان متغیر واسطه و حلقه ارتباطی بین دو بخش عمل کرده و ظرفیت واقعی خط، تابع مستقیم زمان‌های پردازش نامطمئن بوده و همزمان پاسخ‌گویی سیستم به تقاضای نوسانی را امکان‌پذیر می‌سازد. در جدول ۱، چارچوب مقایسه‌ای پژوهش‌های پیشین و جایگاه پژوهش حاضر نمایش داده شده است.

جدول ۱- بررسی پیشینه پژوهش.

Table 1- Research background review.

مطالعات مورد بررسی	$MALBP$	$MCLSP$	مدل‌های ترکیبی $MALBP-MCLSP$	عدم قطعیت زمان پردازش	عدم قطعیت تقاضا
[24], [23]		✓			✓
[1-4]	✓				
[6], [5]	✓			✓	
[9], [8]		✓			
[11], [10]		✓			✓
[16], [15]	✓		✓		✓
[21], [17-19]				✓	
پژوهش حاضر	✓	✓	✓	✓	✓

۳- تعریف مساله و مدل سازی

در این پژوهش، یکپارچه سازی دو مساله کلاسیک برنامه ریزی تولید مورد توجه قرار می گیرد: *MALBP* که شامل تخصیص وظایف به ایستگاه های کاری، انتخاب ایستگاه های فعال و تعیین زمان چرخه برای هر محصول است؛ و مساله *MCLSP* که برنامه ریزی تولید در یک افق چند دوره ای را از طریق تعیین مقادیر تولید، موجودی، کسری و راه اندازی برای هر محصول بر عهده دارد. اغلب مدل های موجود داده ها را قطعی در نظر می گیرند، حال آن که سیستم های واقعی تولید در معرض منابع متعددی از عدم قطعیت قرار دارند. جامع ترین مدل های پیشین نیز صرفاً عدم قطعیت تقاضا را مدنظر قرار می دهد. با این حال، در عمل زمان های پردازش وظایف نیز به دلیل عواملی همچون خرابی ماشین آلات، تغییر عملکرد نیروی کار و کیفیت مواد اولیه ماهیتی تصادفی دارند. لذا در این مدل، دو منبع اصلی عدم قطعیت در سیستم تولید در نظر گرفته شده است: عدم قطعیت تقاضا و عدم قطعیت زمان پردازش. تقاضای هر محصول در هر دوره به صورت متغیر تصادفی با ξ_{kp}^{ω} مدل می شود که بیانگر مقدار واقعی تقاضای محصول k در دوره p تحت سناریوی ω است. این مقادیر پیش از اجرای مدل مشخص نیستند و تنها در مرحله دوم و پس از وقوع هر سناریو افشا می شوند. استفاده از مجموعه سناریوها امکان شبیه سازی تغییرات شدید و غیر منتظره تقاضا مانند افزایش ناگهانی در شرایط بحرانی یا کاهش در دوره های رکود را فراهم می سازد و مدل را به شرایط واقعی بازار نزدیک تر می کند.

به طور مشابه، زمان پردازش وظایف در خط مونتاژ نیز قطعی فرض نشده و با متغیر t_{ik}^{ω} مدل شده است که نشان دهنده زمان واقعی انجام وظیفه i برای محصول k تحت سناریوی ω است. این متغیر امکان نمایش تغییر پذیری های ناشی از خرابی ماشین آلات، تفاوت عملکرد اپراتورها یا کیفیت مواد اولیه را فراهم می کند. حضور این عدم قطعیت در قید ظرفیت ایستگاه ها به این معناست که در برخی سناریوها، زمان انجام وظایف ممکن است افزایش یافته و در نتیجه ظرفیت تولید کاهش یابد که می تواند منجر به افزایش کسری تقاضا، افزایش موجودی احتیاطی یا افزایش تعداد راه اندازی های تولید در دوره های بعدی شود.

برای مدیریت این عدم قطعیت ها، مدل از ساختار یک برنامه ریزی تصادفی دو مرحله ای استفاده می کند. در مرحله اول، که شامل تصمیمات راهبردی بلندمدت است، تخصیص وظایف به ایستگاه ها، تعیین ایستگاه های فعال و تعریف زمان چرخه هر محصول با توجه به اطلاعات ناقص و پیش از تحقق عدم قطعیت ها تعیین می شود. این تصمیمات در تمامی سناریوها ثابت باقی می مانند. در مرحله دوم، پس از مشاهده مقادیر واقعی ξ_{kp}^{ω} و t_{ik}^{ω} ، تصمیمات عملیاتی شامل مقدار تولید W_{kp}^{ω} ، سطح موجودی S_{kp}^{ω} ، مقدار کمبود r_{kp}^{ω} و وضعیت راه اندازی Z_{kp}^{ω} برای هر سناریو تنظیم می شوند. به این ترتیب سیستم قادر است به طور پویا رفتار خود را با شرایط واقعی تطبیق دهد.

اثر هم زمان این دو نوع عدم قطعیت موجب می شود مدل رفتارهای واکنشی متفاوتی را در سناریوهای مختلف نشان دهد. برای مثال، در صورت افزایش تقاضا و مناسب بودن زمان پردازش، سیستم با افزایش تولید به صورت موفق پاسخ می دهد. اما اگر زمان پردازش طولانی شود، حتی با تقاضای متوسط ممکن است سیستم ناچار به تحمل کسری یا انتقال بخشی از تولید به دوره های آتی شود و در صورتی که هر دو منبع عدم قطعیت در جهت نامطلوب قرار گیرند، تقاضای بالا و زمان پردازش طولانی سیستم، ممکن است با محدودیت ظرفیت جدی مواجه شده و مجبور به افزایش تعداد ایستگاه ها یا پذیرش کسری بالا شود. این رفتار انعطاف پذیر از مزایای اصلی مدل تصادفی است و در مدل های قطعی قابل مشاهده نیست.

برای برخورد محاسباتی با این عدم قطعیت ها، در این پژوهش از تکنیک های پذیرفته شده در ادبیات استفاده شده است، از جمله نمونه گیری مونت کارلو برای تولید سناریوهای تصادفی، روش *SAA* برای تقریب امید ریاضی هزینه ها، خطی سازی مدل و تبدیل آن به یک مدل *MILP* و استفاده از نرم افزارهای *GAMS* و *Python* برای حل کارآمد مدل. این رویکردها مبتنی بر ظرفیت های شناخته شده علمی در حل مدل های تصادفی و مبتنی بر سناریو هستند و در آثار معتبر همچون [20] نیز پیشنهاد شده اند.

در این پژوهش چارچوب مذکور توسعه داده شده و یک مدل دو مرحله ای تصادفی معرفی می شود. در مرحله اول (تصمیمات راهبردی)، تخصیص وظایف، انتخاب ایستگاه های فعال و تعیین زمان چرخه محصولات پیش از تحقق عدم قطعیت ها مشخص می شوند و در تمامی سناریوها ثابت می مانند. در مرحله دوم (تصمیمات عملیاتی) پس از مشاهده مقادیر واقعی تقاضا و زمان پردازش، تصمیمات مربوط به تولید، موجودی، کسری و راه اندازی برای هر محصول و هر دوره در هر سناریو تعیین می شوند. در جدول ۲، مجموعه ها، متغیرها و پارامترهای مساله معرفی شده اند:

جدول ۲- معرفی مجموعه‌ها، متغیرها و پارامترهای مساله.

Table 2- Introduction to problem sets, variables, and parameters.

مجموعه‌ها	
I	مجموعه وظایف
J	مجموعه ایستگاه‌های کاری
K	مجموعه محصولات
TP	مجموعه دوره‌های برنامه‌ریزی
Ω	مجموعه سناریوهای عدم قطعیت
پارامترها	
ρ	هزینه فعال‌سازی هر ایستگاه
ϕ_{kp}	هزینه راه‌اندازی محصول k در دوره p
γ_{kp}	هزینه نگهداری موجودی محصول k در دوره p
β_{kp}	هزینه کسری محصول k در دوره p
π^ω	احتمال وقوع سناریوی ω
T	ظرفیت زمانی هر دوره تولید
متغیرهای مرحله اول	
X_{ijk}	اگر وظیفه i از محصول k به ایستگاه j تخصیص یابد برابر ۱
y_j	اگر ایستگاه j فعال باشد برابر ۱
c_k	زمان چرخه محصول k
متغیرهای مرحله دوم	
W_{kp}^ω	میزان تولید محصول k در دوره p تحت سناریوی ω
Z_{kp}^ω	متغیر دودویی راه‌اندازی
S_{kp}^ω	موجودی پایان دوره
r_{kp}^ω	کسری تقاضا

هدف مدل، کمینه‌سازی مجموع هزینه‌های طراحی خط (ایستگاه‌ها) و هزینه‌های عملیاتی موردانتظار (راه‌اندازی، نگهداری و کمبود) در کل افق زمانی است. تابع هدف مدل پیشنهادی به شرح زیر می‌باشد:

$$\min \rho \sum_{j \in J} y_j + \sum_{\omega \in \Omega} \pi^\omega \cdot Q(X \cdot y \cdot c; \omega),$$

که در آن هزینه مرحله دوم برای هر سناریو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q(X \cdot y \cdot c; \omega) = \min \sum_{\rho \in TP} \sum_{k \in K} (\beta_{kp} Z_{kp}^\omega + \gamma_{kp} S_{kp}^\omega + \phi_{kp} r_{kp}^\omega).$$

قیود مرحله اول مدل شامل قیود تخصیص یکتا، فعال‌سازی ایستگاه، تقدم وظایف و ظرفیت زمانی هر ایستگاه است:

$$\sum_{j \in J} X_{ijk} = 1, \quad \text{For all } i \in I, k \in K.$$

$$X_{ijk} \leq y_j, \quad \text{For all } i \in I, k \in K, j \in J.$$

$$\sum_{j \in J} j X_{ijk} \leq y_j, \quad \text{For all } i \in I, k \in K.$$

$$\sum_{j \in J} j X_{vjk} \leq \sum_{j \in J} j X_{bjk}, \quad \text{For all } v, b \in I: P(v, b) = 1, k \in K.$$

$$\sum_{i \in I} t_{ik} X_{ijk} \leq c_k, \quad \text{For all } k \in K, j \in J.$$

محدودیت‌های مرحله دوم مدل نیز شامل ظرفیت تولید دوره، ارتباط با راه‌اندازی، تراز موجودی، محدودیت کسری و دامنه متغیرها است:

$$\sum_{k \in K} W_{kp}^{\omega} c_k \leq T, \quad \text{For all } \omega \in \Omega.$$

$$W_{kp}^{\omega} \leq \sum_{p=P}^{NT} \xi_{kp}^{\omega} Z_{kp}^{\omega}, \quad \text{For all } \omega \in \Omega. k \in K. p \in TP.$$

$$W_{kp}^{\omega} + r_{kp}^{\omega} + S_{kp-1}^{\omega} = \xi_{kp}^{\omega} + S_{kp}^{\omega}, \quad \text{For all } \omega \in \Omega. k \in K. p \in TP.$$

$$r_{kp}^{\omega} \leq \xi_{kp}^{\omega}, \quad \text{For all } \omega \in \Omega. k \in K. p \in TP.$$

$$S_{k0}^{\omega} = 0, \text{ For all } \omega \in \Omega. k \in K, W_{kp}^{\omega} \cdot r_{kp}^{\omega} \cdot S_{kp}^{\omega} \geq 0. Z_{kp}^{\omega} \in \{0,1\}: \text{ For all } \omega \in \Omega. k \in K. p \in TP.$$

این مدل، که توسعه یافته MCALB-LS-UD است، علاوه بر عدم قطعیت تقاضا، عدم قطعیت زمان پردازش وظایف را نیز در نظر می گیرد.

۴- روش حل و تحلیل عددی

برای حل مدل برنامه ریزی تصادفی دو مرحله ای غیر خطی تحت عدم قطعیت، ابتدا ساختار غیر خطی مدل، شامل حاصل ضرب متغیرهای دودویی و پیوسته و همچنین توابع غیر خطی مرتبط با هزینه های راه اندازی و موجودی، با استفاده از معرفی متغیرهای کمکی و قیود خطی سازی، به فرم MILP تبدیل شد. این خطی سازی امکان استفاده از روش های دقیق بهینه سازی MILP و نرم افزارهایی مانند GAMS را فراهم می کند و پیچیدگی محاسباتی مدل را در مقیاس بزرگ قابل مدیریت می سازد.

پس از این مرحله، برای حل مدل تصادفی دو مرحله ای از روش SAA استفاده شد. در این روش، مجموعه ای از ۱۰۰ سناریوی واقع گرایانه برای تقاضا و زمان پردازش با بهره گیری از شبیه سازی مونت کارلو تولید شد. هر سناریو یک تحقق ممکن از پارامترهای نامطمئن را نمایش می دهد و به این ترتیب امکان تقریب امید ریاضی تابع هدف در محیط عدم قطعیت فراهم می گردد. تصمیمات مرحله اول شامل طراحی خط، فعال سازی ایستگاه ها و زمان چرخه، پیش از تحقق عدم قطعیت اتخاذ شده و برای تمامی سناریوها ثابت باقی می ماند. سپس برای هر سناریو، مساله مرحله دوم MILP اجرا شده و مقادیر متغیرهای عملیاتی شامل تولید، موجودی، کسری و راه اندازی تعیین شدند.

در بخش پیاده سازی، تولید سناریوها، استخراج مقادیر متغیرهای مرحله دوم و تحلیل آماری آن ها توسط Python انجام شد، در حالی که حل MILP مرحله دوم برای هر سناریو در محیط GAMS اجرا گردید. در تحلیل های پایتون، سه متغیر عملیاتی به صورت x_{p1} ، x_{p2} و x_{p3} تعریف شده اند که به ترتیب نماینده رفتار تصمیمات عملیاتی مرتبط با سه محصول متفاوت هستند. در مدل واقعی، این متغیرها متناظر با مقادیر W_{kp}^{ω} (میزان تولید)، S_{kp}^{ω} (موجودی) و تا حدی اثرات ناشی از r_{kp}^{ω} (کسری) تلقی می شوند؛ اما در این تحلیل، برای سادگی و نمایش نتایج آماری، مقادیر مربوط به تولید محصول در سناریوهای مختلف به عنوان متغیرهای x_{pi} مورد بررسی قرار گرفته اند.

تحلیل عددی مبتنی بر ۱۰۰ سناریوی تصادفی نشان داد که متغیرهای تصمیم مرحله دوم دارای توزیع نسبتاً پایدار، اما وابسته به تغییرات سناریوها هستند. نتایج حاصل از شکل های ۲ تا ۴ بیانگر نکات زیر است:

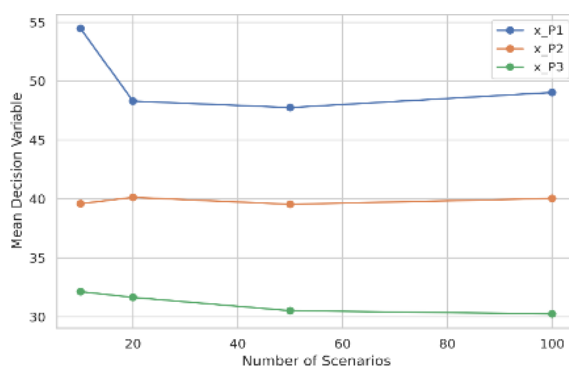
۱. نمودار Boxplot (شکل ۲): نشان می دهد که بیشترین پراکندگی مقادیر تولید مربوط به محصول ۱ (x_{p1}) است، در حالی که محصول ۳ (x_{p3}) رفتار پایدارتر و فشرده تری دارد. این رفتار می تواند ناشی از وابستگی بیشتر محصول ۱ به نوسانات تقاضا یا زمان پردازش باشد.
۲. نمودار توزیع تجربی^۱ (شکل ۳): نشان می دهد که احتمال این که مقدار تولید محصول ۱ کمتر از ۵۵ باشد، حدود ۷۵٪ است که بیانگر حساسیت بیشتر آن به تغییرات شرایط عملیاتی است. در مقابل، توزیع x_{p3} حول میانگین خود فشرده تر بوده و با احتمال بالایی در حوالی ۳۰ نوسان می کند. این پایداری می تواند سیستم را قادر سازد در شرایط عدم قطعیت، دقت بالاتری در برنامه ریزی دسته تولید برای محصول ۳ داشته باشد.

¹ Cumulative Distribution Function (CDF)

۳. نمودار همگرایی SAA (شکل ۴): نشان می‌دهد که میانگین مقادیر تصمیم مرحله دوم پس از حدود ۵۰ سناریو همگرا شده و تغییرات ناچیزی دارند. این نتیجه نشان می‌دهد که روش SAA با تعداد ۱۰۰ سناریو به پایداری آماری کافی رسیده و نتایج حاصل از مدل معتبر و قابل اتکا هستند.

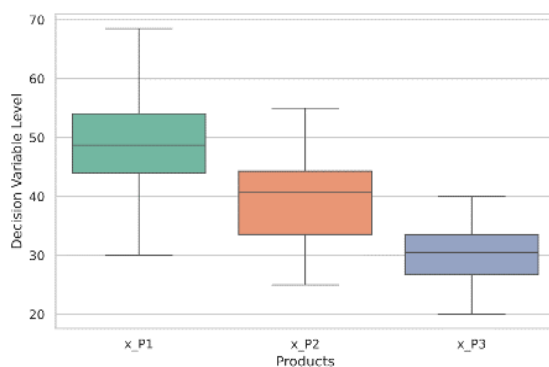
همچنین نتایج آماری ارایه شده نشان می‌دهد که میانگین مقادیر تولید برابر با ۴۹/۰۲، ۴۰/۰۴ و ۳۰/۲۶ برای محصولات ۱، ۲ و ۳ است و بیشترین انحراف معیار برابر با ۸/۹۳ برای محصول ۱ بوده که نشان‌دهنده ریسک و پراکندگی بیشتر است، در حالی که محصول ۳ کمترین انحراف معیار (۴/۹۳) را داشته و رفتاری پایدارتر از خود نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل‌های ۲ تا ۴ مشاهده می‌کنید، میانه مقادیر تولید تقریباً ۴۹ واحد برای x_{p1} ، ۴ واحد برای x_{p2} و ۳۰ واحد برای x_{p3} بود، در حالی که دامنه بین چارکی بیشترین نوسان را به x_{p1} و کمترین نوسان را به x_{p3} نسبت می‌دهد. نمودار CDF نشان می‌دهد که احتمال آن که x_{p1} کمتر از ۵۵ باشد حدود ۷۵٪ است، در حالی که x_{p3} توزیع فشرده‌تری حول میانگین دارد و حساسیت کمتری به عدم قطعیت از خود نشان می‌دهد.



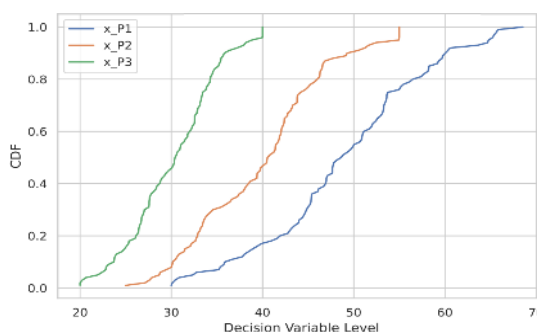
شکل ۲- همگرایی نمونه‌گیری میانگین متغیرهای تصمیم.

Figure 2- Convergence of sampling mean of decision variables.



شکل ۳- نمودار جعبه‌ای متغیرهای تصمیم.

Figure 3- Box plot of decision variables.



شکل ۴- نمودار CDF متغیرهای تصمیم.

Figure 4- CDF diagram of decision variables.

۵- جمع‌بندی

این پژوهش یک مدل یکپارچه و مبتنی بر برنامه‌ریزی تصادفی برای ترکیب دو مساله بنیادی برنامه‌ریزی تولید، یعنی *MALBP* و *MCLSP* ارائه کرد. ویژگی متمایز مدل پیشنهادی آن است که دو منبع کلیدی عدم قطعیت، تقاضای متغیر و زمان‌های پردازش تصادفی، به‌طور هم‌زمان و در یک چارچوب دومرحله‌ای مدل‌سازی شده‌اند. تحلیل‌های عددی مبتنی بر ۱۰۰ سناریوی واقع‌گرایانه نشان داد که در نظر گرفتن هم‌زمان این دو عدم قطعیت موجب افزایش پایداری تصمیمات، تخصیص ظرفیت کارتر و کاهش هزینه‌های عملیاتی در مقایسه با مدل‌های قطعی و تک‌عدم‌قطعیتی می‌شود. به‌ویژه، مشاهده شد که نوسانات زمان پردازش می‌تواند به‌طور مستقیم بر امکان‌پذیری ظرفیت، میزان تولید و رفتار موجودی تاثیر بگذارد و این امر ضرورت مدل‌سازی مشترک ماهیت تصادفی تقاضا و پردازش را تقویت می‌کند. علاوه بر این، نتایج روش *SAA* نشان داد که مدل از نظر آماری پایدار بوده و قادر است تخمین معتبری از هزینه مورد انتظار در محیط‌های پرعدم‌قطعیت ارائه دهد؛ موضوعی که با الزامات مدل‌سازی در محیط‌های صنعتی ناپایدار همخوانی دارد.

از منظر کاربردی، یافته‌های این پژوهش چند پیامد مدیریتی قابل توجه به‌همراه دارد: نخست آن‌که مدل پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان ابزاری تحلیلی برای مدیران تولید در محیط‌های پویا مورد استفاده قرار گیرد تا ترکیب تصمیمات بلندمدت طراحی خط و تصمیمات کوتاه‌مدت برنامه‌ریزی تولید را با کمترین ریسک اتخاذ کنند. دوم، نتایج نشان داد که در نظر گرفتن زمان پردازش تصادفی باعث می‌شود تصمیم‌گیرندگان با دید دقیق‌تری ظرفیت واقعی خط مونتاژ را ارزیابی کرده و از کمبودهای ناشی از خوش‌بینی بیش‌ازحد در مدل‌های قطعی اجتناب کنند. سوم، این مدل می‌تواند به مدیران کمک کند سیاست‌های موجودی، راه‌اندازی و ظرفیت‌بندی را به‌صورت داده‌محور و مقاوم تنظیم کرده و دامنه نوسانات عملیاتی را کاهش دهند؛ موضوعی که به‌ویژه در دوران بحران‌هایی مانند همه‌گیری‌ها، اختلالات زنجیره‌تامین یا جهش‌های غیرمنتظره تقاضا اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. مجموعه این پیامدها نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی، علاوه بر ارزش تئوریک، از ظرفیت عملی بالایی برای پشتیبانی از تصمیم‌گیری در سیستم‌های تولیدی معاصر برخوردار است.

در کنار یافته‌های این پژوهش، مسیرهای متعددی برای توسعه آتی پیشنهاد می‌شود: نخست، گسترش مدل به‌سمت چارچوب‌های چندمرحله‌ای^۱ می‌تواند پویایی زمانی آشکار شدن عدم قطعیت‌ها را بهتر منعکس کند. دوم، افزودن مولفه‌های انسانی مانند یادگیری، خستگی و مهارت اپراتورها می‌تواند دقت مدل‌سازی زمان پردازش را افزایش دهد. سوم، استفاده از روش‌های کاهش سناریو، تجزیه‌های پیشرفته نظیر *Benders* چندبعدی یا الگوریتم‌های فراابتکاری می‌تواند حل مدل‌های بزرگ‌مقیاس را تسهیل کند. چهارم، ترکیب مدل با شاخص‌های پایداری زیست‌محیطی مانند مصرف انرژی یا انتشار کربن می‌تواند زمینه کاربرد مدل در محیط‌های تولید سبز را فراهم سازد. نهایتاً، توسعه مدل برای ساختارهای پیچیده‌تر خط مونتاژ نظیر خطوط دوطرفه، خطوط *U* شکل یا خطوط موازی می‌تواند دامنه کاربرد نتایج را در صنایع واقعی گسترش دهد. این مسیرهای پیشنهادی می‌توانند پایه‌ای برای پژوهش‌های آتی بوده و گام‌های مهمی در جهت پیشبرد ادبیات ترکیبی *MALBP-MCLSP* در محیط‌های نامطمئن به‌شمار روند.

منابع

- [1] Boysen, N., Fließner, M., & Scholl, A. (2007). A classification of assembly line balancing problems. *European journal of operational research*, 183(2), 674–693. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.10.010>
- [2] Becker, C., & Scholl, A. (2006). A survey on problems and methods in generalized assembly line balancing. *European journal of operational research*, 168(3), 694–715. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.07.023>
- [3] Bartholdi, J. J. (1993). Balancing two-sided assembly lines: A case study. *International journal of production research*, 31(10), 2447–2461. <https://doi.org/10.1080/00207549308956868>
- [4] Özcan, U., Gökçen, H., & Toklu, B. (2010). Balancing parallel two-sided assembly lines. *International journal of production research*, 48(16), 4767–4784. <https://doi.org/10.1080/00207540903074991>
- [5] Jin, W., He, Z., & Wu, Q. (2021). Robust optimization of resource-constrained assembly line balancing problems with uncertain operation times. *Engineering computations*, 39(3), 813–836. <https://doi.org/10.1108/EC-01-2021-0061>
- [6] Boissière, J., Frein, Y., & Rapine, C. (2008). Lot-sizing in a serial distribution system with capacitated in-system production flow. *International journal of production economics*, 112(1), 483–494. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2007.05.013>
- [7] Teoh, W. L., Chuah, S. K., Khoo, M. B. C., Castagliola, P., & Yeong, W. C. (2017). Optimal designs of the synthetic t chart with estimated process mean. *Computers & industrial engineering*, 112, 409–425. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.08.021>

¹ Multistage stochastic programming

- [8] Pochet, Y., Wolsey, L. A. (2006). Production planning by mixed integer programming. In *Production planning by mixed integer programming* (pp. 421–481). Springer New York. https://doi.org/10.1007/0-387-33477-7_15
- [9] Florian, M., & Klein, M. (1971). Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints. *Management science*, 18(1), 12–20. <https://doi.org/10.1287/mnsc.18.1.12>
- [10] Tempelmeier, H. (2013). Stochastic lot sizing problems. In *Handbook of stochastic models and analysis of manufacturing system operations* (pp. 313–344). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6777-9_10
- [11] Helber, S., Sahling, F., & Schimmelpfeng, K. (2013). Dynamic capacitated lot sizing with random demand and dynamic safety stocks. *OR spectrum*, 35(1), 75–105. <https://doi.org/10.1007/s00291-012-0283-6>
- [12] Shapiro, A., Dentcheva, D., & Ruszczyński, A. (2021). *Lectures on stochastic programming: Modeling and theory*. SIAM. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718751>
- [13] Li, Y., Saldanha-da-Gama, F., Liu, M., & Yang, Z. (2023). A risk-averse two-stage stochastic programming model for a joint multi-item capacitated line balancing and lot-sizing problem. *European journal of operational research*, 304(1), 353–365. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.09.043>
- [14] Boysen, N., Fliedner, M., & Scholl, A. (2008). Assembly line balancing: Which model to use when? *International journal of production economics*, 111(2), 509–528. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2007.02.026>
- [15] Ahmed, S., Tawarmalani, M., & Sahinidis, N. V. (2004). A finite branch-and-bound algorithm for two-stage stochastic integer programs. *Mathematical programming*, 100(2), 355–377. <https://doi.org/10.1007/s10107-003-0475-6>
- [16] Zemkoho, A., & Dempe, S. (2020). *Bilevel optimization advances and next challenges*. Springer International Publishing. <https://www.researchgate.net/publication/346250425>
- [17] Scholl, A., & Becker, C. (2006). State-of-the-art exact and heuristic solution procedures for simple assembly line balancing. *European journal of operational research*, 168(3), 666–693. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.07.022>
- [18] Pinedo, M., & Hadavi, K. (1992). Scheduling: Theory, algorithms and systems development. *Operations research proceedings 1991* (pp. 35–42). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-46773-8_5%0A%0A
- [19] Rahmani, D., & Heydari, M. (2014). Robust and stable flow shop scheduling with unexpected arrivals of new jobs and uncertain processing times. *Journal of manufacturing systems*, 33(1), 84–92. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2013.03.004>
- [20] Kleywegt, A. J., Shapiro, A., & Homem-de-Mello, T. (2002). The sample average approximation method for stochastic discrete optimization. *SIAM journal on optimization*, 12(2), 479–502. <https://doi.org/10.1137/S1052623499363220>
- [21] Peng, J., & Liu, B. (2004). Parallel machine scheduling models with fuzzy processing times. *Information sciences*, 166(1), 49–66. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2003.05.012>
- [22] Santoso, T., Ahmed, S., Goetschalckx, M., & Shapiro, A. (2005). A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty. *European journal of operational research*, 167(1), 96–115. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.01.046>
- [23] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., & El Ghaoui, L. (2009). *Robust optimization*. Princeton university press. <https://www.torrossa.com/en/resources/an/5576051>
- [24] Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, 52(1), 35–53. <https://doi.org/10.1287/opre.1030.0065>
- [25] Delage, E., & Ye, Y. (2010). Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations research*, 58(3), 595–612. <https://doi.org/10.1287/opre.1090.0741>
- [26] Heitsch, H., & Römisch, W. (2003). Scenario reduction algorithms in stochastic programming. *Computational optimization and applications*, 24(2), 187–206. <https://doi.org/10.1023/A:1021805924152>
- [27] Escudero, L. F., Garín, A., Merino, M., & Pérez, G. (2007). A two-stage stochastic integer programming approach as a mixture of branch-and-fix coordination and benders decomposition schemes. *Annals of operations research*, 152(1), 395–420. <https://doi.org/10.1007/s10479-006-0138-0>